MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală – 19 februarie 2015

CLASA A V-A
SOLUŢII ŞI BAREM

1.	Anul naşterii poate fi de forma $\overline{19ab}$ sau $\overline{20ab}$	1p
	Dacă acesta ar fi de forma $\overline{20ab}$,ar rezulta că $\overline{ab}$ = 3· 20 = 60 şi $\overline{20ab}$ = 2060 ceea ce este imposibil	2p
	Deci numărul este de forma $\overline{19ab}$ şi $\overline{ab}$ = 3· 19 = 57. Anul naşterii este 1957	2p
	În 2015 persoana va împlini 58 de ani	2p
2.a)	$[2^{56} + (5^2)^{25} - 7^{16}] : [2^{64} : (2^4)^2 + 5^{50} - 7^{16}]$	2p
	$(2^{56} + 5^{50} - 7^{16}) : (2^{56} + 5^{50} - 7^{16}) = 1$	2p
b)	A = $2^{0^1} + 2^{0^5} + 2^{1^0} + 2^{1^1} + 2^{5^0}$	1p
	A = $2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^1 = 8$	1p
	A = 2^3 este cub perfect	1p
3.a)	Termenii şirului sunt de forma $a_k = 6 + 7\cdot(k - 1)$ sau $a_k = 7\cdot k - 1$	1p
	$2015 = 7 \cdot 288 - 1 \Rightarrow 2015$ este termen al şirului	1p
b)	$a_{2015} = 7 \cdot 2015 - 1 = 14104$	2p
c)	$S = 6 + 6 + 7 \cdot 1 + 6 + 7 \cdot 2 + ... + 6 + 7 \cdot 2014$	1p
	$S = 6 \cdot 2015 + 7 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 2014)$	1p
	$S = 2015 \cdot 7055 = 14215825$	1p
4.	$N = 7^{4n} \cdot (7 + 6) + 5 \cdot 13 + 2$	1p
	$N = 13 \cdot (7^{4n} + 5) + 2$	1p
	Câtul împărţirii lui N la 13 este $7^{4n} + 5$	2p
	$7^4 = 2401$	1p
	$7^{4n} = (7^4)^n = 2401^n = (2400 + 1)^n = M_{100} + 1$	1p
	Finalizare: Ultimele două cifre ale numărului N sunt 06.	1p

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală – 19 februarie 2015

CLASA A VI-A

SOLUŢII ŞI BAREM

1.a)	$2^2 + 0^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow$ 2015 este „număr bănăţean”	1p
b)	$\overline{abcd} \geq 2015 \Rightarrow a \geq 2$ $4^2 = 16 > d \Rightarrow a \leq 3$ Cazul I: $a = 2 \Rightarrow b \leq 2$ şi $c \leq 2$ Se obţin „numerele bănăţene”: 2015, 2028, 2105, 2116, 2129, 2208, 2219 Cazul II: $a = 3 \Rightarrow b = 0$ şi $c = 0$ Se obţine „numărul bănăţean” 3009	2p
	$2015 \vdots 5$ şi $2105 \vdots 5$ 2028, 2116 şi 2208 se divid cu 2 $3009 \vdots 3$ $2219 = 7 \cdot 317$	1p
	$\Rightarrow$ Singurul număr prim „bănăţean” este 2129	1p
c)	S = 17829	1p
	$1 + 7 + 8 + 2 + 9 = 27 \vdots 3 \Rightarrow S \vdots 3$	1p
2.	$E = 100 + \frac{1}{2} + 100 + \frac{1}{6} + 100 + \frac{1}{12} + 100 + \frac{1}{20} + \ldots + 100 + \frac{1}{90}$	1p
	$E = 100 + \frac{1}{1\cdot2} + 100 + \frac{1}{2\cdot3} + 100 + \frac{1}{3\cdot4} + 100 + \frac{1}{4\cdot5} + \ldots + 100 + \frac{1}{9\cdot10}$	2p
	$E = 900 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$	2p
	$E = 900 + \frac{1}{1} - \frac{1}{10}$	1p
	E = 900,9	1p
3.	$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 180°$	1p
	$2\cdot m(\sphericalangle COD) + m(\sphericalangle COD) = 90°$ $m(\sphericalangle COD) = 30°$, $m(\sphericalangle AOB) = 60°$	1p
	(OD – bisectoarea $\sphericalangle EOC \Rightarrow m(\sphericalangle EOD) = m(\sphericalangle COD) = 30°$	1p
	$m(\sphericalangle EOA) = 180° - 30° = 150°$	1p
	(OM – bisectoarea $\sphericalangle BOC \Rightarrow m(\sphericalangle BOM) = m(\sphericalangle COM) = 90° : 2 = 45°$ (ON – bisectoarea $\sphericalangle EOA \Rightarrow m(\sphericalangle EON) = m(\sphericalangle NOA) = 150° : 2 = 75°$	1p
	$m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle MOB) + m(\sphericalangle BOA) + m(\sphericalangle AON) = 45° + 60° + 75° = 180°$	1p
	$\Rightarrow$ M, O, N - coliniare	1p
4.	Aplicăm principiul cutiei	1p
	Un pătrat perfect se termină în una din cifrele 0,1,4,5,6 sau 9	1p
	Alegem trei “cutii”. În prima cutie punem numerele care se termină în 0 sau 5, în a doua cutie numerele care se termină în 1 sau 6 şi în ultima cutie pe cele care se termină în 4 sau 9	2p
	Cum sunt trei cutii şi patru numere, rezultă că există o cutie cu două numere.	1p
	Diferenţa a două numere din aceeaşi cutie se termină în 0 (dacă numerele se termină în aceeaşi cifră) sau în 5 (dacă numerele se termină în cifre diferite). Deci diferenţa se divide cu 5.	2p

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală – 19 februarie 2015

CLASA A VII-A

SOLUŢII ŞI BAREM

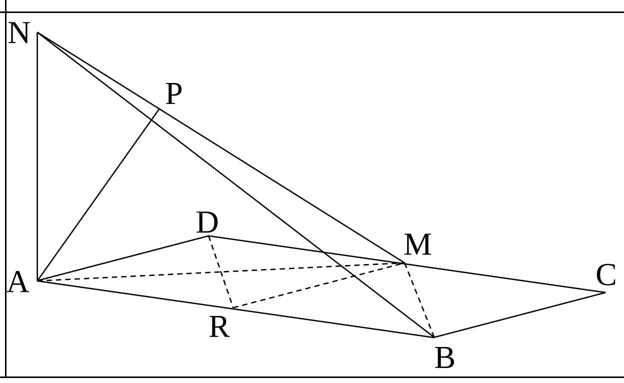
1.	Fie a = $2016^n + 2015x^2 + 2017$. Vom arăta că a nu este pătrat perfect.	1p
	U (2016^n) ∈ { 1 , 6}	1p
	U ($2015x^2$) ∈ { 0 , 5}	2p
	Deci ultima cifră a lui a este 3 sau 8 (din 4 cazuri distincte)	2p
	Nr. a nu este pătrat perfect şi $\sqrt{2016^n + 2015x^2 + 2017}$ este iraţional.	1p
2.	$\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{2 \cdot 3}{2}} + \frac{1}{\frac{3 \cdot 4}{2}} + \cdots + \frac{1}{\frac{x \cdot (x+1)}{2}} = \frac{2015}{1008}$	1p
	$\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2015}{1008}$	1p
	$2 \cdot \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{x(x+1)}\right] = \frac{2015}{1008}$	1p
	$2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{2015}{1008}$	1p
	$2\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{2015}{1008}$	1p
	$\frac{2x}{x+1} = \frac{2015}{1008}$	1p
	$x = 2015$	1p
3.	Fie BM ∩ CD = {E}	1p
	Δ MAB ≡ Δ MDE (ULU) ⇒[DE] ≡ [AB] şi cum DE ∥ AB ⇒ ABDE paralelogram ⇒ DB ∥ AE	2p
	În Δ ACE: AD ⊥ CE şi EQ ⊥ AC ({Q}= BE∩AC) ⇒ M este ortocentrul triunghiului	2p
	⇒ CM ⊥ AE şi cum AE ∥ DB ⇒ CM ⊥ DB	2p
4.	Fie ΔABC cu m(∢A) = 90°, m(∢B) = 30°, (BE bisectoarea ∢B şi (AD bisectoarea ∢A. Construim AF ⊥ BC, F ∈ BC. m(∢FAB) = 60° ⇒ m(∢FAD) = 60° - 45° = 15°	1p
	ΔFAD ~ ΔABE (UU) ⇒ $\frac{AD}{BE} = \frac{AF}{AB}$ (1)	2p
	ΔAFC ~ ΔBAC (UU) ⇒ $\frac{AF}{AB} = \frac{AC}{BC}$ (2)	2p
	m(∢B) = 30° ⇒ $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ (3)	1p
	Din (1), (2) şi (3) ⇒ $\frac{AD}{BE} = \frac{1}{2}$ sau BE = 2AD	1p

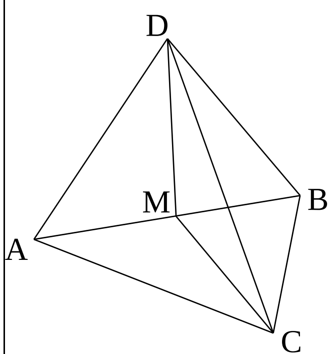
MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală – 19 februarie 2015

CLASA A VIII-A
SOLUŢII ŞI BAREM

1.	$[x]$ şi 2015 sunt numere întregi deci $3\{x\}$ este întreg.	1p
	$0 \le \{x\} < 1 \mid \cdot 3 \Rightarrow 0 \le 3\{x\} < 3$	1p
	Rezultă că $3\{x\} \in \{0, 1, 2\}$ şi $\{x\} \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$	2p
	Soluţiile sunt : $x_1 = 2015$	1p
	$x_2 = 2014 + \frac{1}{3}$	1p
	$x_3 = 2013 + \frac{2}{3}$	1p
2.a)	$\frac{2a}{16a^4+3} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow 16a^4 + 3 \ge 8a$	
	Avem că $16a^4 + 1 \ge 8a^2$ (echivalent cu $(4a^2 - 1)^2 \ge 0$)	1p
	şi $8a^2 + 2 \ge 8a$ (echivalent cu $2(2a - 1)^2 \ge 0$)	1p
	Prin adunare obţinem : $16a^4 + 1 + 8a^2 + 2 \ge 8a^2 + 8a$, adică $16a^4 + 3 \ge 8a$.	1p
	Egalitatea este satisfacută pentru $a = \frac{1}{2}$	
b)	Din inegalitatea mediilor : $2x^2 + 1 \ge 2\sqrt{2x^2 \cdot 1} = 2\sqrt{2}\lvert x\rvert \ge 0$	1p
	şi $2y^2 + 1 \ge 2\sqrt{2y^2 \cdot 1} = 2\sqrt{2}\lvert y\rvert \ge 0$	1p
	Prin înmulţire obţinem : $(2x^2+1)(2y^2+1) \ge 8\lvert xy\rvert \ge 8xy$, oricare ar fi x, y $\in$ **R** . Cu egalitate dacă $2x^2 = 1$, $2y^2 = 1$ şi $xy \ge 0$, adică $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	2p
3.	 Notăm cu R mijlocul laturii [AB]. $\Rightarrow AR = RB = DM = MC = a$ ABCD fiind paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow$ ①: BMDR paralelogram $\Rightarrow MB \parallel DR$ ②: ADMR romb $\Rightarrow AM \perp DR$. $\Rightarrow AM \perp MB$	1p

	$AN \perp (ABC)$, $MB \subset (ABC) \Rightarrow AN \perp MB$	1p
	$\Rightarrow MB \perp (AMN)$.	1p
b)	$\sphericalangle (MN, (ABC)) = \sphericalangle(MN, pr_{(ABC)}MN) = \sphericalangle(MN,AM) = \sphericalangle(AMN)$	1p
	$m\sphericalangle(ABC) = 120° \Rightarrow m\sphericalangle(DAB) = 60° \Rightarrow AM = a\sqrt{3}$ $AN \perp (ABC) \Rightarrow AN \perp AM \Rightarrow \Delta$ AMN dreptunghic în A $\Rightarrow tg(\sphericalangle AMN) = \frac{AN}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow m\sphericalangle(AMN) = 30°$	1p
c)	$\left.\begin{array}{l}\text{Construim } AP \perp MN. \\ \text{Din a)} \Rightarrow MN \perp MB,\ AM \perp MB\end{array}\right\} \Rightarrow AP \perp (MNB) \Rightarrow d(A, (NMB)) = AP$ În Δ AMN dreptunghic în A, $AN = a$, $AM = a\sqrt{3} \Rightarrow MN = 2a$	1p
	$\Rightarrow AP = \frac{AN \cdot AM}{MN} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	1p
4.		
	$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{CA}{CB} + \frac{CB}{CA} + \frac{DA}{DB} + \frac{DB}{DA} \geq 4$	2p
	$\Rightarrow \frac{CA}{CB} + \frac{CB}{CA} = 2$ şi $\frac{DA}{DB} + \frac{DB}{DA} = 2$	1p
	$\Rightarrow$ CA = CB şi DA = DB	1p
	$\Rightarrow \Delta$ ACB isoscel, Δ ADB isoscel . Fie M – mijlocul laturii [AB] $\Rightarrow DM \perp AB$ şi $CM \perp AB$	2p
	$\Rightarrow AB \perp (DMC)$ $\Rightarrow AB \perp CD$	1p